Apellido y Nombres: ....,,,,,...
DNI: .... Padrón: .... Código Asignatura: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....
Correo electrónico: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Primera fecha. 19 de marzo de 2021.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Calcular el valor principal de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x+1)(x^2+1)}\, dx$$

Decidir si la integral impropia es convergente.

Ejercicio 2. Determinar el mayor dominio abierto D de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$$

Explicar por qué

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$$

es holomorfa en D y dar una expresión de $f(z)$ para todo $z \in D$.

Ejercicio 3. Plantear el problema de la distribución de la temperatura en estado estacionario en la semifranja $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, y > 0\}$ con los lados verticales perfectamente aislados y el lado inferior con temperatura $f(x)$ en cada $x \in (0, \pi)$. ¿Qué condición adicional garantiza unicidad de solución? Resolver el problema para tal caso, bajo las hipótesis necesarias sobre f.

Ejercicio 4. Resolver el siguiente problema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) - u_t(x,t) = 0 & 0 < x < +\infty,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x) & 0 \leqslant x < \infty \end{cases}$$

Ejercicio 5. Estudiar si las funciones $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \operatorname{sen}(e^{x^2}), \quad g(x) = xe^{x^2} \operatorname{sen}(e^{x^2})$$

son o no de orden exponencial. Para cada una, analizar si existe su transformada de Laplace y en caso afirmativo, dar su abscisa de convergencia.

ANÁLISIS MATEMÁTICO III – 2C 2021

Resolución esquemática del integrador **19-03-2021 (1ª fecha)**

EJERCICIO 1) Calcular el valor principal de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x(x+1)(x^2+1)}dx$. Decidir si la integral impropia es convergente.

Resolución: Primero veamos dónde están las "impropiedades". La función $h:\Re \longrightarrow \Re$ tal que $h(x) = \frac{sen(x)}{x(x^2+1)}$ si $x \neq 0$ y $h(0) = 1$ es continua y absolutamente integrable en toda la recta, pues $|h(x)| \leq \frac{1}{x^2+1}$. Por lo tanto, el punto delicado para estudiar es $x = -1$. Elijamos un $r > 0$ y separemos los problemas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x(x+1)(x^2+1)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{x+1}dx = \int_{-\infty}^{-1-r} \frac{h(x)}{x+1}dx + \int_{-1-r}^{-1+r} \frac{h(x)}{x+1}dx + \int_{-1+r}^{+\infty} \frac{h(x)}{x+1}dx \qquad (1.1)$$

Ahora estudiemos cada término por separado, dejando el segundo para el final (es el más delicado).

(a) $\int_{-\infty}^{-1-r} \frac{h(x)}{x+1}dx$: para cada $x \leq -1-r$ tenemos $x+1 \leq -r \therefore |x+1| \geq r \therefore \frac{1}{|x+1|} \leq \frac{1}{r}$ y entonces el integrando verifica $\left|\frac{h(x)}{x+1}\right| \leq \frac{|h(x)|}{r} \leq \frac{1}{r(x^2+1)}$. Por lo tanto, la integral $\int_{-\infty}^{-1-r} \frac{h(x)}{x+1}dx$ converge absolutamente.

(b) $\int_{-1+r}^{+\infty} \frac{h(x)}{x+1}dx$: para cada $x \geq -1+r$ tenemos $x+1 \geq r \therefore \frac{1}{|x+1|} \leq \frac{1}{r}$ y entonces tenemos la misma acotación anterior: el integrando verifica $\left|\frac{h(x)}{x+1}\right| \leq \frac{|h(x)|}{r} \leq \frac{1}{r(x^2+1)}$. Por lo tanto, la integral $\int_{-1+r}^{+\infty} \frac{h(x)}{x+1}dx$ converge absolutamente.

(c) $\int_{-1-r}^{-1+r} \frac{h(x)}{x+1}dx \overset{definición}{=} \underset{\delta \to 0+}{Lim} \int_{-1-r}^{-1-\delta} \frac{h(x)}{x+1}dx + \underset{\varepsilon \to 0+}{Lim} \int_{-1+\varepsilon}^{-1+r} \frac{h(x)}{x+1}dx$. Mediante el cambio de variables $t = x+1$:

$$\int_{-1-r}^{-1-\delta}\frac{h(x)}{x+1}dx=\int_{-r}^{-\delta}\frac{h(t-1)}{t}dx=\int_{-r}^{-\delta}\frac{g(t)}{t}dt \quad , \quad \int_{-1+\varepsilon}^{-1+r}\frac{h(x)}{x+1}dx=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{h(t-1)}{t}dx=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{g(t)}{t}dt$$

donde la función $g(t)=h(t\text{-}1)$ es analítica en toda la recta real. En particular, admite el desarrollo en serie $g(t)=g(0)+g'(0)t+\frac{1}{2!}g''(0)t^2+....$ absoluta y uniformemente convergente en el intervalo $[-1-r,-1+r]$. Por lo tanto para todo t no nulo en dicho intervalo podemos escribir

$$\frac{g(t)}{t}=\frac{g(0)}{t}+g'(0)+\frac{1}{2!}g''(0)t+....=\frac{g(0)}{t}+g_0(t)$$

Donde g_0 es continua (más aún: analítica) en el intervalo $[-1-r,-1+r]$. Entonces

$$\int_{-1-r}^{-1-\delta}\frac{h(x)}{x+1}dx=\int_{-r}^{-\delta}\frac{g(t)}{t}dt=g(0)\int_{-r}^{-\delta}\frac{dt}{t}+\int_{-r}^{-\delta}g_0(t)dt=-g(0)\ln\left(\frac{r}{\delta}\right)+\int_{-r}^{-\delta}g_0(t)dt \quad (1.2)\ (a)$$

y

$$\int_{-1+\varepsilon}^{-1+r}\frac{h(x)}{x+1}dx=\int_{\varepsilon}^{r}\frac{g(t)}{t}dt=g(0)\int_{\varepsilon}^{r}\frac{dt}{t}+\int_{\varepsilon}^{r}g_0(t)dt=g(0)\ln\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)+\int_{\varepsilon}^{r}g_0(t)dt \quad (1.2)(b)$$

Puesto que $g(0)=h(-1)=\dfrac{sen(1)}{2}\neq 0$ y que por ser g_0 continua, tenemos los límites $\underset{\delta\to 0+}{Lim}\int_{-r}^{-\delta}g_0(t)dt=\int_{-r}^{0}g_0(t)dt$ y $\underset{\varepsilon\to 0+}{Lim}\int_{\varepsilon}^{r}g_0(t)dt=\int_{0}^{r}g_0(t)dt$, de (1.2) (a) y (b) se deduce que no existe $\int_{-1-r}^{-1+r}\frac{h(x)}{x+1}dx\overset{definición}{=}\underset{\delta\to 0+}{Lim}\int_{-1-r}^{-1-\delta}\frac{h(x)}{x+1}dx+\underset{\varepsilon\to 0+}{Lim}\int_{-1+\varepsilon}^{-1+r}\frac{h(x)}{x+1}dx$ y por lo tanto la integral del enunciado es divergente. Estas mismas igualdades (12)(a) y (b) permiten comprobar la existencia del valor principal:

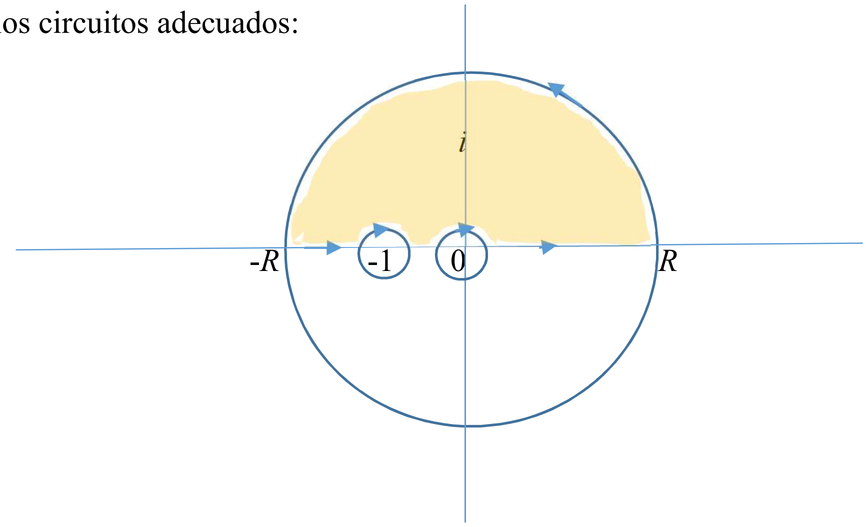
$$vp\int_{-1-r}^{-1+r}\frac{h(x)}{x+1}dx\overset{definición}{=}\underset{\varepsilon\to 0+}{Lim}\int_{-1-r}^{-1-\varepsilon}\frac{h(x)}{x+1}dx+\underset{\varepsilon\to 0+}{Lim}\int_{-1+\varepsilon}^{-1+r}\frac{h(x)}{x+1}dx=$$

$$=\underset{\varepsilon\to 0+}{Lim}\left(-g(0)\ln\left(\tfrac{r}{\varepsilon}\right)+\int_{-r}^{-\varepsilon}g_0(t)dt+g(0)\ln\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)+\int_{\varepsilon}^{r}g_0(t)dt\right)=\int_{-r}^{r}g_0(t)dt$$

Cálculo del valor principal: El procedimiento ya es clásico. Se trata de elegir la función compleja adecuada:

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z(z+1)(z^2+1)}=\frac{e^{iz}}{z(z+1)(z-i)(z+i)}$$

y los circuitos adecuados:



Para cada $R>1$ y cada ε tal que $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, se trata del borde de la región sombreada e indicado con flechas en la figura, es decir:

$$C_{R,\varepsilon}=\overbrace{\{x\in\Re:-R\le x\le -1-\varepsilon\}}^{I_{R,\varepsilon}}\cup\overbrace{\{-1+\varepsilon e^{i\theta}:0\le\theta\le\pi\}}^{-C_\varepsilon}\cup\overbrace{\{x\in\Re:-1+\varepsilon\le x\le -\varepsilon\}}^{J_{R,\varepsilon}}\cup$$

$$\cup\overbrace{\{\varepsilon e^{i\theta}:0\le\theta\le\pi\}}^{-C'_\varepsilon}\cup\overbrace{\{x\in\Re:\varepsilon\le x\le R\}}^{K_{R,\varepsilon}}\cup\overbrace{\{Re^{i\theta}:0\le\theta\le\pi\}}^{\Gamma_R}$$

Por el teorema de los residuos, para todo $R>1$ y todo $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$:

$$\oint_{C_{R,\varepsilon}} f(z)dz=2\pi i RES(f,i)=2\pi i\frac{e^{-1}}{i(i+1)2i}=\frac{\pi}{e(-1+i)}=-\frac{\pi}{2e}(1+i) \qquad (1.3)$$

(es un polo simple y el residuo se calcula muy fácilmente). Como siempre en estos casos la idea es tomar límite en el primer miembro cuando $R\longrightarrow+\infty$ y $\varepsilon\longrightarrow 0+$, aprovechando que el último miembro no depende de R ni de ε. Veamos qué ocurre en cada segmento regular del circuito:

$$(1)\ \int_{I_{R,\varepsilon}} f(z)dz+\int_{J_{R,\varepsilon}} f(z)dz+\int_{K_{R,\varepsilon}} f(z)dz=\int_{-R}^{-1-\varepsilon} f(x)dx+\int_{-1+\varepsilon}^{-\varepsilon} f(x)dx+\int_{\varepsilon}^{R} f(x)dx=$$

$$\xrightarrow[\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0+}]{} vp\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = vp\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}dx}{x(x+1)(x^2+1)}dx =$$

$$= vp\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x)dx}{x(x+1)(x^2+1)} + ivp\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen(x)dx}{x(x+1)(x^2+1)}$$

No hemos demostrado la existencia del valor principal de la parte real de esta integral, pero vamos a ver cómo se deduce directamente del cálculo que sigue.

(2) $\displaystyle\int_{-C_\varepsilon} f(z)dz = -\int_0^{\pi}\frac{e^{i[-1+\varepsilon[\cos(\theta)+isen(\theta)]]}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta}{(-1+\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon e^{i\theta}[(-1+\varepsilon e^{i\theta})^2+1]} = -i\int_0^{\pi}\frac{e^{i[-1+\varepsilon[\cos(\theta)+isen(\theta)]]}d\theta}{(-1+\varepsilon e^{i\theta})[(-1+\varepsilon e^{i\theta})^2+1]}$

(este paso debe justificarse y puede hacerse observando que el integrando admite un desarrollo uniformemente convergente en serie de potencias de ε en torno de 0) $\displaystyle\xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} -i\int_0^{\pi}\frac{e^{-i}}{-2}d\theta = \frac{i}{2e^i}\int_0^{\pi}d\theta = \frac{i\pi e^{-i}}{2} = \frac{\pi}{2}[sen(1)+i\cos(1)]$

(3) $\displaystyle\int_{-C'_\varepsilon} f(z)dz = -\int_0^{\pi}\frac{e^{i\varepsilon[\cos(\theta)+isen(\theta)]}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}(1+\varepsilon e^{i\theta})[(\varepsilon e^{i\theta})^2+1]} = -i\int_0^{\pi}\frac{e^{i\varepsilon[\cos(\theta)+isen(\theta)]}d\theta}{(1+\varepsilon e^{i\theta})[(\varepsilon e^{i\theta})^2+1]}$

(este paso debe justificarse y puede hacerse observando que el integrando admite un desarrollo uniformemente convergente en serie de potencias de ε en torno de 0) $\displaystyle\xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} -i\int_0^{\pi}d\theta = -i\pi$

(4) $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_0^{\pi}\frac{e^{iR[\cos(\theta)+isen(\theta)]}iRe^{i\theta}d\theta}{Re^{i\theta}[Re^{i\theta}+1][(Re^{i\theta})^2+1]} = i\int_0^{\pi}\frac{e^{-Rsen(\theta)}e^{iR\cos(\theta)}d\theta}{[Re^{i\theta}+1][R^2e^{i2\theta}+1]}$, por lo tanto

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi}\frac{e^{-Rsen(\theta)}e^{iRsen(\theta)}d\theta}{[R\,e^{i\theta}+1][R^2e^{i2\theta}+1]}\right| \le \int_0^{\pi}\frac{\left|e^{-Rsen(\theta)}e^{iRsen(\theta)}\right|d\theta}{\left|Re^{i\theta}+1\right|\left|R^2e^{i2\theta}+1\right|} = \int_0^{\pi}\frac{\left|e^{-Rsen(\theta)}\right|d\theta}{\left|Re^{i\theta}+1\right|\left|R^2e^{i2\theta}+1\right|}$$

Mediante acotaciones habituales y el Lema de Jordan se prueba entonces que $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$.

En definitiva,

$$-\frac{\pi(1+i)}{2e} \overset{(1.3)}{=} \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0+}\oint_{C_{R,\varepsilon}} f(z)dz =$$

$$= vp\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x)dx}{x(x+1)(x^2+1)} + ivp\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sen(x)dx}{x(x+1)(x^2+1)} + \frac{\pi}{2}[sen(1)+i\cos(1)] - i\pi$$

Igualando partes reales e imaginarias de ambos miembros:

(A) $-\dfrac{\pi}{2e} = vp\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)dx}{x(x+1)(x^2+1)} + \frac{\pi}{2} sen(1)$

(B) $-\dfrac{\pi}{2e} = vp\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)dx}{x(x+1)(x^2+1)} + \frac{\pi}{2}\cos(1) - \pi$

Por lo tanto, $\quad vp\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)dx}{x(x+1)(x^2+1)} = \pi - \frac{\pi}{2}\cos(1) - \frac{\pi}{2e}$.

Bonus: Si usted revisa cuidadosamente los pasos anteriores, puede rastrear la prueba de la existencia del valor principal del segundo miembro de (A), igualdad que permite calcular fácilmente su valor: $vp\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)dx}{x(x+1)(x^2+1)} = -\frac{\pi}{2} sen(1) - \frac{\pi}{2e}$.

EJERCICIO 2. Determinar el mayor dominio abierto D de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$. Explicar por qué $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$ es holomorfa en D y dar una expresión de $f(z)$ para todo $z \in D$.

Resolución: La homografía $z \mapsto w = \dfrac{1+z}{1-z}$ transforma el semiplano abierto $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$ en el disco $D(0;1) = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ y el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} w^n$ es 1, como puede comprobarse muy fácilmente mediante el criterio del cociente. Por lo tanto, el mayor dominio <u>abierto</u> donde converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} w^n$ es el disco $D(0;1)$, pues la serie converge condicionalmente en algunos puntos del borde de este disco (por ejemplo en $w = i$) y diverge en todos los puntos del exterior de dicho disco. Por lo tanto, la función $g(w) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} w^n$ es analítica (y por lo tanto holomorfa) en el disco $D(0;1)$, lo que significa que el mayor dominio abierto de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$ es, efectivamente, el semiplano $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$. Para encontrar una expresión de f en este semiplano observemos que para todo $w \in D(0;1)$ se verifica que $g'(w) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w^{n-1} = 1 + w + w^2 + ... = \frac{1}{1-w}$. Por lo tanto, g es una primitiva de $\dfrac{1}{1-w}$ definida en el disco $D(0;1)$, por ejemplo: $g(w) = -Log(1-w)$, donde Log es el logaritmo principal. Entonces, para todo $z \in H$ es $w = \dfrac{1+z}{1-z} \in D(0;1)$ y en este dominio

$$f(z) = g\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = -Log\left(1 - \frac{1+z}{1-z}\right) = -Log\left(\frac{2z}{z-1}\right).$$

Observación adicional: La función *f*, definida en principio en el semiplano *H*, puede extenderse analíticamente al dominio abierto

$$D = \mathbb{C} - \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{2z}\right) = 0 \,,\, \mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{2z}\right) \leq 0 \right\} \overset{cuentas}{=} \mathbb{C} - \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0 \,,\, 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1 \}$$

Es claro que *f* no puede extenderse analíticamente a un dominio mayor pues el Logaritmo principal no puede extenderse analíticamente a un dominio que incluya puntos del corte $\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0 \,,\, \mathrm{Re}(z) \leq 0 \}$. Por último, el dominio *D* no es el único máximo posible, pues el logaritmo principal no es el único logaritmo que puede elegir para definir $g(w) = -\log(1-w)$: lo único que debe cumplirse es que el dominio incluya el disco $D(0;1)$.

EJERCICIO 3. Plantear el problema de la distribución de temperatura en estado estacionario en la semifranja $\{(x,y) \in \Re^2 : 0 < x < \pi \,,\, y > 0\}$, con los lados verticales perfectamente aislados y el lado inferior con temperatura *f*(*x*) en cada $x \in (0,\pi)$. ¿Qué condición garantiza la unicidad de la solución? Resolver dicho problema, introduciendo las hipótesis necesarias sobre *f*.

Resolución: La ecuación de distribución de temperaturas en estado estacionario es la ecuación de Laplace. Por lo tanto, el problema es:

$$\begin{cases} (i)\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , \quad y > 0 \\ (ii)\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0 \quad , \quad y > 0 \\ (iii)\ u(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \tag{3.1}$$

Existen muchas formas para resolver este problema, que no tiene solución única, pero sí una única acotada. Buscaremos, entonces, esta solución acotada considerando que para cualquier entero positivo *n* la función $u_n(x,y) = e^{-ny}\cos(nx)$ es solución de (*i*) y (*ii*), que son condiciones lineales (combinación lineal de soluciones de (*i*) y (*ii*) también es solución). Podemos aplicar entonces el principio de superposición, con lo cual los coeficientes de $u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-ny}\cos(nx)$ quedan determinados por la condición (*iii*): $u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) = f(x)$. Si *f* es seccionalmente continua en el intervalo $[0,\pi]$, su extensión 2π-periódica par $\widetilde{f} : \Re \longrightarrow \Re$ admite la serie de Fourier $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$, donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \widetilde{f}(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$$

Para «estimular» la convergencia de la serie podemos pedir – por ejemplo – que f sea seccionalmente C^1 (o C^2, ya que estamos) y entonces la solución que obtenemos es

$$u(x,y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ny}\cos(nx) \quad , \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$$

Es decir: $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$ y $c_n = a_n$ para todo $n \geq 1$.

EJERCICIO 4. Resolver el siguiente problema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$\begin{cases} (i)\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0 \quad , \quad 0 < x < +\infty \quad , \quad t > 0 \\ (ii)\quad u(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ (iii)\quad u(x,0) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \quad , \quad 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$

Resolución: También en este caso hay varias formas de resolver el problema (esto ocurre con todos los problemas matemáticos…). Vamos a elegir una forma que se adapte a lo que aprendimos en el curso, que es considerar la extensión impar de u respecto de x a toda la recta real, es decir:

$$v(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & si \quad x \geq 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ -u(-x,t) & si \quad x \leq 0 \quad , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Obsérvese la consistencia de la definición en $x = 0$, pues $u(0,t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Entonces, planteamos el problema

$$\begin{cases} (\widetilde{i})\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) = 0 \quad , \quad -\infty < x < +\infty \quad , \quad t > 0 \\ (\widetilde{ii})\ \ v(0,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ (\widetilde{iii})\ v(x,0) = -\mathbb{1}_{(-1,0)}(x) + \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \quad , \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

donde el segundo miembro de $(\widetilde{iii})$ es la extensión impar del segundo miembro de (*iii*). Ahora asumimos que *v* (y por lo tanto *u*) es lo suficientemente suave en su dominio como para permitir las siguientes operaciones:

$$\hat{v}(\omega,y)=\int_{-\infty}^{+\infty} v(x,t)e^{-i\omega x}dx \quad , \quad v(x,t)=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{v}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega \quad ,$$

$$\widehat{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)}(\omega,t)=-\omega^2\hat{v}(\omega,t), \qquad \widehat{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)}(\omega,t)=\frac{\partial}{\partial t}\hat{v}(\omega,t),$$

Aplicando la transformación de Fourier a la ecuación (*i*) extendida en forma impar respecto de *x*:

$$-\omega^2\hat{v}(\omega,t)-\frac{\partial}{\partial t}\hat{v}(\omega,t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{v}(\omega,t)=A(\omega)e^{-\omega^2 t}$$

donde A es una función a determinar por la condición inicial:

$$\hat{v}(\omega,0)=A(\omega)=\hat{h}(\omega)$$

donde $h(x)=-1_{(-1,0)}(x)+1_{(0,1)}(x)$. En definitiva tenemos que $\hat{v}(\omega,t)=\hat{h}(\omega)e^{-\omega^2 t}$ y por lo tanto

$$v(x,t)=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{h}(\omega)e^{-\omega^2 t+i\omega x}d\omega$$

Ahora, para volver a nuestra función original, recordemos que por ser *h* impar (además de absolutamente integrable), su transformada de Fourier

$$\hat{h}(\omega)=\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)\cos(\omega x)dx}^{=0}+i\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)sen(\omega x)dx=2i\int_{0}^{+\infty}h(x)sen(\omega x)dx=$$
$$=2i\int_{0}^{+\infty}(1_{(0,1)}(x)sen(\omega x)dx=2i\int_{0}^{1}sen(\omega x)dx\overset{\omega\neq 0}{=}2i\frac{1-\cos(\omega)}{\omega}$$

Obsérvese que $\hat{h}(0)=0$, valor que coincide con $\underset{\omega\to 0}{Lím}\,2i\frac{1-\cos(\omega)}{\omega}$, es decir: $\hat{h}$ es continua en 0. Además, obsérvese que $\hat{h}$ es impar. Entonces, para todo $x>0$:

$$u(x,t)=v(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{h}(\omega)e^{-\omega^2 t+i\omega x}d\omega=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{h}(\omega)e^{-\omega^2 t}\cos(\omega x)d\omega + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{h}(\omega)e^{-\omega^2 t}sen(\omega x)d\omega =$$

(la primera integral se anula por ser impar su integrando; el integrando de la segunda es par)

$$= \frac{i}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\hat{h}(\omega)e^{-\omega^2 t}sen(\omega x)d\omega = \frac{i}{\pi}\int_{0}^{+\infty}2i\frac{1-\cos(\omega)}{\omega}e^{-\omega^2 t}sen(\omega x)d\omega$$

Es decir:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(\omega)-1}{\omega}e^{-\omega^2 t}sen(\omega x)d\omega \qquad (4.1)$$

Obsérvese que, efectivamente se verifica la condición $u(0,t)=0$ para todo $t \geq 0$.

***Observación* 1**: El factor exponencial en el integrando colabora estupendamente con la convergencia de la integral (4.1) siempre y cuando $t > 0$. Para $t = 0$, esto no ocurre y la convergencia es condicional.

***Observación* 2**: En esta resolución no hemos mencionado la transformación de Fourier-seno (no es necesaria) pero desde luego que puede utilizarse, y si la conoce puede reconocerla en la fórmula final:

$$u(x,t) = \tfrac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{0}^{+\infty}f(\lambda)sen(\omega\lambda)d\lambda\right)e^{-\omega^2 t}sen(\omega x)d\omega$$

También se puede utilizar la transformación de Laplace, pero el problema es que no hay una fórmula de inversión tan bonita.

EJERCICIO 5: Estudiar si las funciones $f:(0,+\infty)\longrightarrow\Re$ y $g:(0,+\infty)\longrightarrow\Re$ tales que $f(x)=sen(e^{x^2})$ y $g(x)=xe^{x^2}sen(e^{x^2})$ para todo $x > 0$ son de orden exponencial. Para cada una, analizar si existe su transformada de Laplace y en caso afirmativo, das su abscisa de convergencia.

Resolución: Que f es de orden exponencial es obvio, pues para todo $x > 0$ es $|f(x)| \leq 1 = 1.e^{0x}$. Ahora, respecto de *g*, Si existieran constantes reales *M* y *α* tales que $|g(x)| \leq Me^{\alpha x}$ para todo $x > 0$, entonces tendríamos $\left|sen(e^{x^2})\right| \leq \dfrac{Me^{\alpha x - x^2}}{x}$ para todo $x > 0$.

Pero esto implica que $\lim_{x\to+\infty} sen(e^{x^2}) = 0$: absurdo (por ejemplo, para

$x_n = \sqrt{\ln\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}$, con n entero positivo, es $\left|sen(e^{x_n^2})\right| = 1$. Por lo tanto, g no es de orden exponencial. Por definición, su transformada de Laplace está definida para los complejos s para los cuales la integral $G(s) = \int_0^\infty g(x)e^{-sx}dx = \underset{b \to +\infty}{Lim} \int_0^b g(x)e^{-sx}dx$ es convergente. Veamos:

$$\int_0^b g(x)e^{-sx}dx = \int_0^b xe^{x^2} sen(e^{x^2})e^{-sx}dx = -\frac{1}{2}\int_0^b [\frac{d}{dx}\cos(e^{x^2})]e^{-sx}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^b \left(\frac{d}{dx}[\cos(e^{x^2})e^{-sx}] + s\cos(e^{x^2})e^{-sx}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^b \frac{d}{dx}[\cos(e^{x^2})e^{-sx}]dx - \frac{1}{2}s\int_0^b \cos(e^{x^2})e^{-sx}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}[\cos(e^{b^2})e^{-sb} - 1] - \frac{1}{2}s\int_0^b \cos(e^{x^2})e^{-sx}dx \qquad (5.1)$$

Ahora bien, la función $w(x) = \cos(e^{x^2})H(x)$ es obviamente una función objeto y verifica la acotación $|w(x)| \le 1 = 1.e^{0x}$ y no existen otras constantes M y $\alpha < 0$ tales que $|w(x)| \le Me^{\alpha x}$ para todo $x > 0$: si $\alpha < 0$, entonces $\underset{x \to +\infty}{Lim} Me^{\alpha x} = 0$. Por lo tanto w tiene su transformada de Laplace $W(s) = \int_0^\infty \cos(e^{x^2})e^{-sx}dx = \underset{b \to +\infty}{Lim}\int_0^b \cos(e^{x^2})e^{-sx}dx$ con abscisa de convergencia 0. Entonces, de (5.1) deducimos que existe el límite $\underset{b \to +\infty}{Lim}\int_0^b g(x)e^{-sx}dx$ sii $\mathrm{Re}(s) > 0$, pues en ese caso $\underset{b \to +\infty}{Lim} e^{-sb} = 0$ y obtenemos

$$G(s) = \int_0^\infty g(x)e^{-sx}dx = \underset{b \to +\infty}{Lim}\int_0^b g(x)e^{-sx}dx = \frac{1}{2} - \frac{s}{2}W(s)$$

con abscisa de convergencia 0. Finalmente, la abscisa de convergencia de F es la misma que la de W, por las mismas razones expuestas previamente para probar que la abscisa de convergencia de W es 0.
